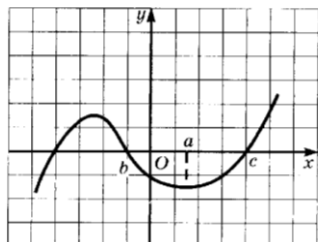
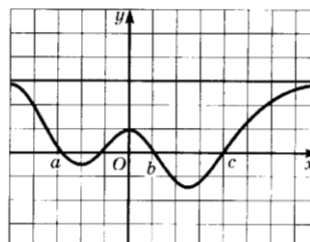


Система задач по теме «Уравнение касательной»

1. Определите знак углового коэффициента касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$, в точках с абсциссами a, b, c :

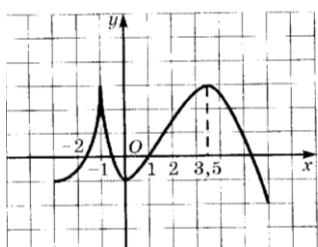


а)

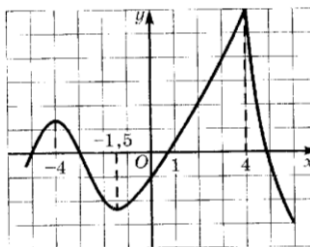


б)

2. Укажите точки, в которых производная равна нулю и точки, в которых производная не существует, если график функции изображен на заданном рисунке:



а)



б)

3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3, a = -1$;

г) $f(x) = \sin x, a = 0$;

б) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}, a = 1$;

д) $f(x) = \operatorname{tg} 2x, a = \frac{\pi}{8}$;

в) $f(x) = \sqrt{4-5x}, a = 0$;

е) $f(x) = \sin^2 x, a = \frac{\pi}{12}$.

4. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, x_0 = -1$;

в) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}, x_0 = -1$;

б) $f(x) = 4\cos x + x, x_0 = \frac{\pi}{6}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}, x_0 = -2$.

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в каждой из указанных точек:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{если } x \geq 0, \\ 2 - x^2, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$;

б) $f(x) = x^2 - 9|x| + 14, x_1 = -7, x_2 = 4,5, x_3 = 8$;

в) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|, x_1 = 0, x_2 = 2,5, x_3 = 4$.

6. Найдите ту точку графика функции $y = f(x)$, в которой угловой коэффициент касательной равен k :

а) $f(x) = 1,5x^2 - x + 1, k = 2$; б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, k = -3$; в) $f(x) = x - \arccos x, k = 2$.

7. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к:

а) эллипсу $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M(1; \sqrt{2})$; б) гиперболу $xy = a, a \neq 0$, в точке $N(a; 1)$.

8. Какой угол образует с осью x касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $f(x) = 4 + x^2, a = 2$;

е) $f(x) = \sqrt{6x+7}, a = 3\frac{1}{3}$;

б) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, a = 3$;

ж) $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}, a = \frac{3\pi}{2}$;

в) $f(x) = 0,2x^5, a = -1$;

г) $f(x) = -7x^3 + 10x^2 + x - 12, a = 0$;

з) $f(x) = \cos x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, a = \frac{\pi}{3}$;

д) $f(x) = \frac{2x-1}{3-2x}, a = \frac{1}{2}$;

и) $f(x) = |x^2 - 3x - 4|, a = -2$.

9. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:

а) $f(x) = x^2 - 2x, a = 3$;

д) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + 3\sqrt{x}, a = 1$;

б) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}, a = 2$;

е) $f(x) = 2\operatorname{arccctg}(3x^2) + 3\operatorname{arctg}(2x^3), a = 0$;

в) $f(x) = \cos(1+4x), a = -0,25$;

ж) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x \geq -3, \\ -2x - 3, & \text{если } x < -3, \end{cases} a = -2$;

г) $f(x) = 2\sqrt{3x-5}, a = 2$;

з) $f(x) = |x^2 - 3x|, a = 4$.

10. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = f(x)$ в точках его пересечения с осью абсцисс, если: $f(x) = x^3 - 27$.

11. На параболе $y = x^2 - 2x - 8$ найти точку M , в которой касательная к ней параллельна прямой $4x + y + 4 = 0$.

12. Составьте уравнения всех касательных к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + 3$, параллельно прямой $y = 9x + 1$.

13. В какой точке графика заданной функции $y = f(x)$ касательная параллельна заданной прямой:

а) $y = 0, f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$; б) $f(x) = \sin \frac{x}{2}, y = -1$; в) $f(x) = \cos^2 x, y = -x + 3$.

14. К графику заданной функции проведите касательную так, чтобы она была параллельна прямой $y = 2 - x$:

а) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - x$; б) $y = \frac{3x+7}{x-3}$; в) $y = -4\sqrt{x+7}$; г) $y = \arccos x$.

15. Найдите расстояние между параллельными прямыми $y = kx + b_1$ и $y = kx + b_2$.

16. На графике функции $f(x)$ найдите точку, в которой касательная к $f(x)$ наклонена к оси абсцисс под углом α , если $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $\alpha = 45^\circ$.

17. В какой точке кривой $y = \sqrt[3]{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 60° ?

18. Вычислите координаты точек пересечения с осью y тех касательных к графику функции $y = \frac{x+4}{x-5}$, которые образуют угол 135° с осью x .

19. Составьте уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = -x$ в точке $M(1; 1)$.

20. Проведите касательную к графику функции $y = x^2 + 1$, проходящую через точку A , не принадлежащую этому графику, если:

а) $A(-1; -2)$; б) $A(0; 0)$.

21. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке M :

а) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$, $M(-3; 9)$; б) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $M(2; 3)$.

22. Через данную точку B проведите касательную к графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = \sqrt{3-x}$, $B(-2; 3)$; б) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $B(1; 2)$.

23. Найдите все значения x , при каждом из которых касательная к графику функции $y = \cos 7x + 7 \cos x$ в точках с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

24. Составьте уравнение касательной и нормали к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью OX .

25. Составьте уравнения односторонних касательных к графику функции $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке (в точке излома).

26. На оси y взята точка B , из нее проведены касательные к графику функции $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$.

Известно, что эти касательные образуют между собой угол 90° . Найдите координаты точки B .

27. Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 5x - 2$, которые пересекаются под прямым углом и одна из них касается в точке с абсциссой 3.

28. Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^2 - |2x - 6|$, проведенных через точки с абсциссами $x = 5$, $x = -5$.

29. При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 + px^2$ в точке $x = 1$ проходит через точку $(2; 3)$?

30. Является ли прямая $y = 4x - 5$ касательной к графику заданной функции? Если да, то найдите координаты точки касания: $y = x^3 + x^2 - x - 2$.

31. Найдите все такие значения параметра a , при которых касательные, проведенные к графикам функций $y = f(x)$ в точке $(a; f(a))$ и $y = g(x)$ в точке $(a; g(a))$, параллельны: $f(x) = x^6$; $g(x) = x^7$.

32. При каких значениях параметра b прямая $y = 9x + b$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x + 15$?

33. Найдите все значения параметров b и c , при которых прямая $y = 2x + 2b$ касается графика параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $M(2; 0)$.

34. Найдите наименьшее положительное значение x , при котором касательные к графикам функций $y = 3\cos\frac{5x}{2}$ и $y = 5\cos\frac{3x}{2} + 2$ параллельны.

35. Точка A с абсциссой -1 и точка B с абсциссой 1 принадлежат графику функции $y = 2x^3 + 3x^2 - \frac{x}{2} + 1$. Найдите сумму абсцисс всех тех точек, в каждой из которых касательная к этому графику параллельна прямой AB .

36. Составьте уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведенной в точке $M(-9; 8)$.

37. Определите, под каким углом парабола $y = x^2 + 2x - 8$ пересекает ось абсцисс.

38. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$ в точке $x = 5$.

39. Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ и осями координат, имеет постоянную площадь, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника. Рассмотрев чертеж к задаче, придумайте геометрический способ построения касательной к гиперболе.

Самостоятельная работа по теме «Уравнение касательной»

I вариант

- Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:
 - $f(x) = \frac{3x-2}{3-x}$, $a = 2$;
 - $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$, $a = -3$.
- Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :
 - $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, x_0 - точка пересечения графика с осью абсцисс;
 - $f(x) = (7-3x)^3$, x_0 - точка пересечения графика с прямой $y = 1$.
- Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 5$ если эта касательная проходит через точку $(0;4)$ и абсцисса точки касания положительна.
- Какой угол (острый, прямой или тупой) образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $f(x) = x^3 - x^2$ в точках -1 ; 0 ; 1 ?
- Зная, что касательная к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в ее вершине параллельна оси ОХ, найдите координаты вершины параболы $y = x^2 + 2x - 1$.
- Прямая $y = x - 2$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -1$. Найдите $f(-1)$.
- Найдите координаты точки, в которой касательная к графику функции $y = \log_4(x-2)$ в точке $x_0 = 3$ пересекает ось ОУ.
- При каком значении p прямая $y = 3 + x$ является касательной к графику функции $f(x) = e^{x-p}$?

II вариант

- Составьте уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$:
 - $f(x) = \frac{2x-5}{5-x}$, $a = 4$;
 - $f(x) = \frac{1}{4(2x-1)^2}$, $a = 1$.
- Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 :
 - $f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$, x_0 - точка пересечения графика с осью ординат;
 - $f(x) = (4x+3)^5$, x_0 - точка пересечения графика с прямой $y = -1$.
- Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 3x + 5$ если эта касательная проходит через точку $(0;1)$ и абсцисса точки касания отрицательна.
- Какой угол (острый, прямой или тупой) образует с положительным направлением оси ОХ касательная к графику функции $f(x) = x^2 - x^3$ в точках -1 ; 0 ; 1 ?
- Зная, что касательная к параболе $y = ax^2 + bx + c$ в ее вершине параллельна оси ОХ, найдите координаты вершины параболы $y = 1 + 8x - 2x^2$.
- Прямая $y = -x + 3$ касается графика функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = -2$. Найдите $f(-2)$.
- Найдите координаты точки, в которой касательная к графику функции $y = \log_3(5-x)$ в точке $x_0 = 4$ пересекает ось ОУ.
- При каком значении p прямая $y = 4 - x$ является касательной к графику функции $f(x) = e^{-x-p}$?